

Aufgabe 27: Pendel mit schwingenden Aufhängepunkt: Lagrange 1. Art

Skript: 3.1 D'Alembert-Prinzip, Lagrangegleichungen 1. Art.

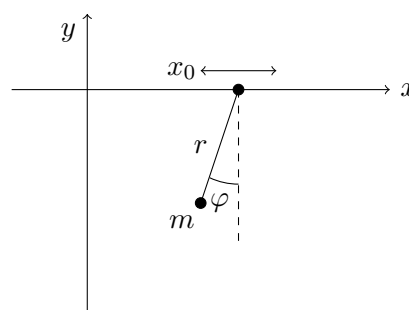
Literatur: Goldstein, Mechanik. Kap. 1.3. Zwangsbedingungen, 1.4 Das D'Alembertsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen.

Nolting, Analytische Mechanik. Kap. 1.2.5 Nicht-holonome Systeme, Kap. 1.2.6 Anwendungen der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Analog zu Aufgabe 2 auf Blatt 6 führe der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels im Schwerfeld auf der x -Achse harmonische Schwingungen durch

$$x = A \cos \omega t.$$

Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf und lösen Sie diese für kleine Ausschläge und die Anfangsbedingungen $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$. Geben Sie das Resultat für die Fadenspannung an.



Hinweise:

- A priori hat der Faden nun eine Länge r . Die Zwangsbedingung erzwingt die Länge l . Formulieren Sie die Zwangsbedingung als $g(r) = 0$ um die Methode der Lagrange-Multiplaktoren anwenden zu können.

Aufgabe 28: Undichter Zylinder und getriebene Platte

Skript: 3.2 Variationsrechnung: Variation mit Nebenbedingung

Literatur: Nolting, Analytische Mechanik. Kap. 1.2.5 Nicht-holonome Systeme, Kap. 1.2.6 Anwendungen der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Betrachten Sie einen geschlossenen, aber undichten Zylinder (siehe Zeichnung). Darin befindet sich eine Platte, die mittels einer festen Stange mit einem Motor M verbunden ist. Die Position der Platte ändere sich mit der Frequenz

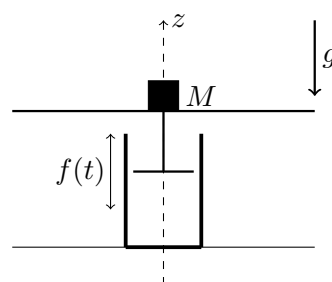
$$f(t) = \frac{\alpha}{m} \cos(\omega t), \quad \omega = \text{konst.}$$

Hierbei ist m die Masse der Platte. Effekte bezüglich einer Kompression können aufgrund der Undichtigkeit vernachlässigt werden.

Stellen Sie die Lagrange-Gleichung für die Bewegung der Platte auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0$$

und verschwindender Zwangskraft bei $t = 0$.



Hinweise:

- Es ist nur eine Nebenbedingung notwendig, welche sich auf die Änderung der Position mit der Zeit bezieht.
- Das Verschwinden der Zwangskraft bei $t = 0$ ist äquivalent dazu, für den Lagrange-Multiplikator $\lambda(0) = 0$ zu verlangen.

Aufgabe 29: Ameise auf einem Seil im Schwerfeld

Skript: 3.2 Variationsrechnung: Variation mit Nebenbedingung, Bsp. 1 Ein Seil im Schwerfeld.

Literatur: Fließbach, Mechanik. Kap. 13 Variation mit Nebenbedingung Isoperimetrische Nebenbedingung.

Bartelmann, Theoretische Physik 1 Mechanik. Kap. 5.5 Variationsrechnung, S.193 ff.

Betrachten Sie ein biegeweiches Seil der Länge l , welches im Schwerfeld zwischen zwei Bäumen jeweils in Höhe h aufgehängt wird. Die Bäume stehen im Abstand d voneinander auf der x -Achse. Berechnen Sie die Form des Seils unter der Annahme, daß der Schwerpunkt möglichst tief hängt, bzw. die potentielle Energie minimal wird. Auf dem Seil sitze eine Ameise und bewege sich vom Punkt $x = a$ nach $x = b$. Welche Entfernung legt diese zurück?